КОМПЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ И ЕЕ ГРАФИКИ

Урмонова А.М., Муминова М.Т.
ГОУ ХГУ имени академика Б.Гафурова
(Республика Таджикистан, г. Худжанд)

Аннотация: *Статья начинается с приведением общего понятия об ортогоналных полиномиов Чебышева – Эрмита. В нем рассматриваются разложения полиномы степени n. А также разрабатывается алгоритм вычисляюший ортогоналных полиномов вместе с постраением их график.*
Ключевые слова: *алгебраический полином, ряд Фурье-Эрмита, алгорит, построение графиков.*
Annatation: *The article begins with a general concept of orthogonal Chebyshev–Hermite polynomials. It considers expansions of polynomials of degree n. An algorithm is also being developed that calculates orthogonal polynomials along with constructing their graph.*
***Key words**: algebraic polynomial, Fourier-Hermite series, algorithm, plotting.*

Пусть $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ - гильбертово пространство вещественных функций f, квадрат, которых суммируем с весом $\rho(x)=e^{-x^2}$ на $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, с конечной нормой

$$\| f \|_{2,\rho}:=\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}|f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Введем следующие обозначения: $\mathcal{P}_n$ - подпространство алгебраических полиномов степени не более n;

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho}\coloneqq \inf\{\| f-p_{n-1} \|_{2,\rho}: p_{n-1}\in \mathcal{P}_{n-1}\}$$

– величины наилучшего приближения функции $f\in L_{2,\rho}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$.

Следует отметить, что в весовом пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ обычные вопросы полиномиальных приближений функций суммами Фурье – Эрмита, гладкостные характеристики, которых определялись специальными модулями непрерывности, ранее исследовалось в работах [1-6]. Однако, вопросы совместного приближения функций и их промежуточных производных суммами Фурье – Чебышева относительно мало изучены в вышеуказанных работах. Данная работа посвящена изучению алгоритме вычисления многочленов степени n и построение их графики.

Приводим определения и некоторые свойства полиномов Чебышева - Эрмита.

Пусть на действительной оси $\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty)$ задана весовая функция

$$\rho(x)=e^{-x^2},\ x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

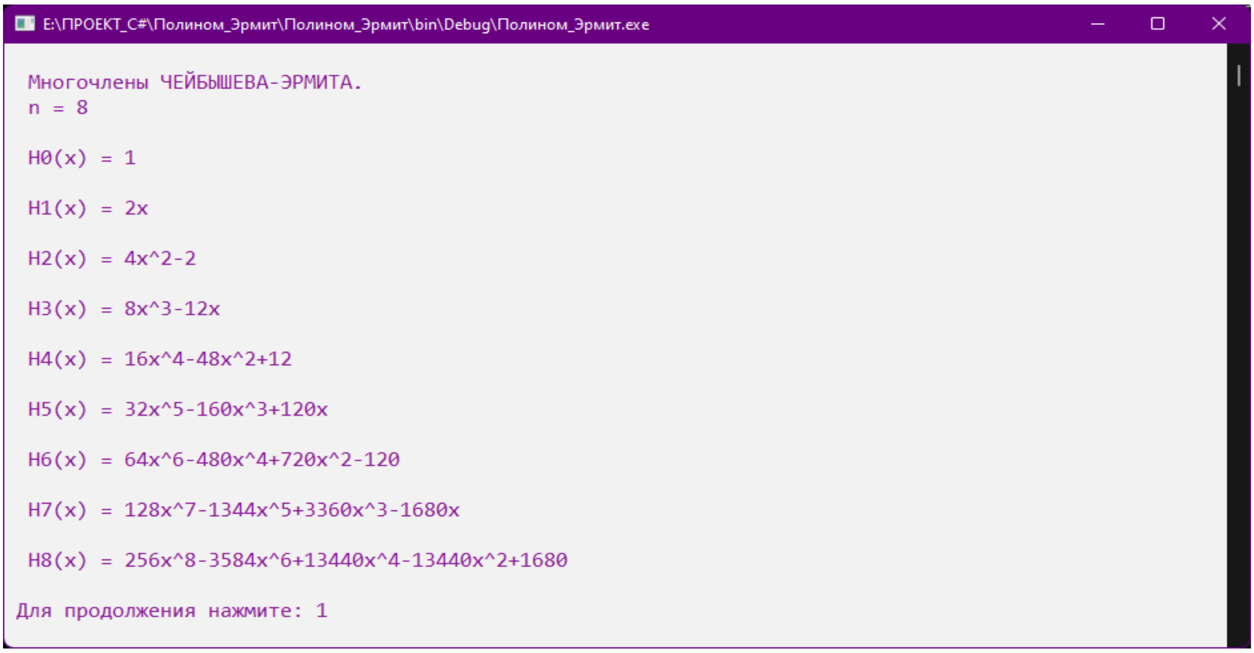
Последовательно дифференцируя $\rho(x)$, находим

$$\rho'(x)=-2xe^{-x^2}, \rho''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2},$$

$$\rho'''(x) = (12x - 8x^3)e^{-x^2},$$
$$\rho^{(IV)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}, \ \ldots \qquad (2)$$
Из (1) и (2) следует, что
$$e^{x^2}\rho(x) \equiv 1 = H_0(x), e^{x^2}\rho'(x) = -2x = H_1(x),$$
$$e^{x^2}\rho''(x) = (4x^2 - 2) = H_2(x), e^{x^2}\rho'''(x) = (-8x^3 + 12x) = H_3(x),$$
$$e^{x^2}\rho^{(IV)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12) = H_4(x), \qquad (3)$$
где $H_n(x)$ - некоторый многочлен степени n. Из приведенных равенств в (3) по индукции вытекает, что производная порядка n от функции $\rho(x)$ есть произведение от этой функции на некоторые многочлены степени n, а потому для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем, что
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)} \qquad (4)$$
которое называется многочленом Чебышева - Эрмита степени n.

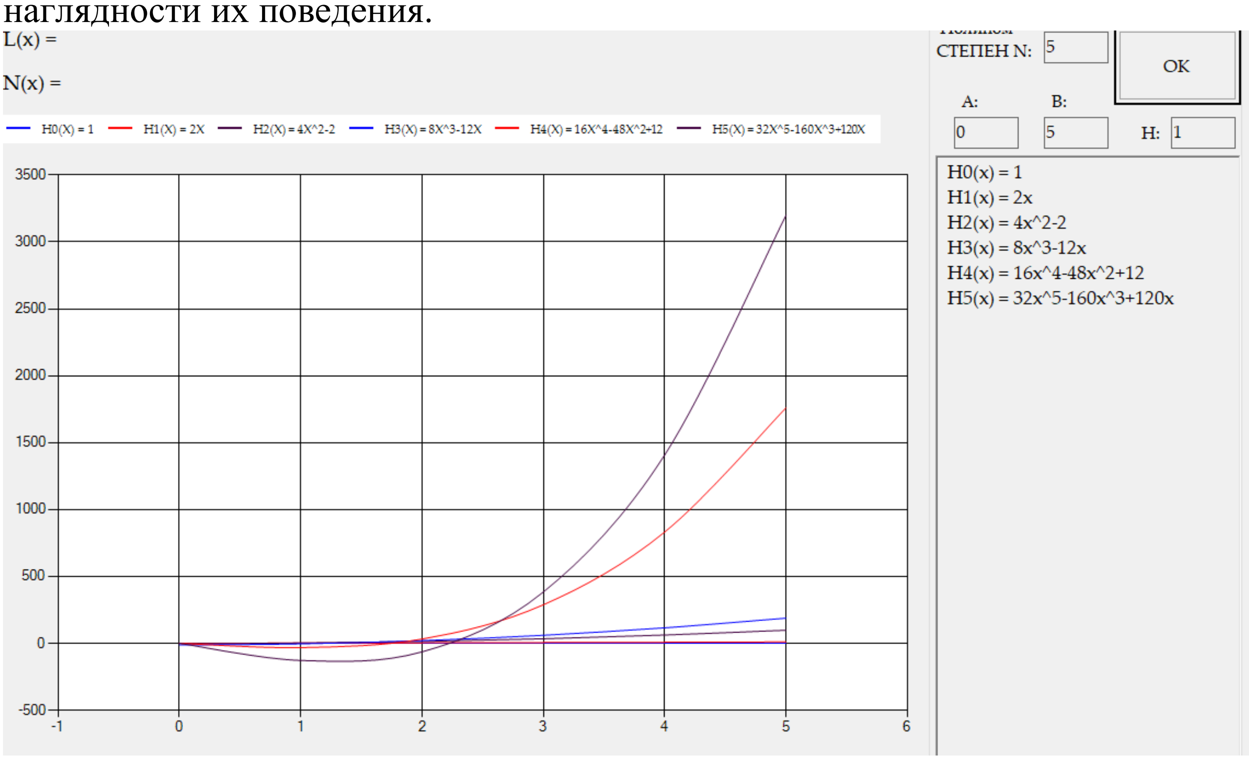
Первые несколько многочленов Чебышева - Эрмита, как следует из (3) и (4), имеют вид:
$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x,$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x,$$
$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.$$
Для вычисления мночленов степени n требуется больше времени и труда. Поэтому компютерное моделирование за мгновения построет сэкономив нам время и труд. За одно можно составить алгоритм вычесления значений функций, которые понадобится для рисования их графиков. Для этого используем язык программирование C#:
```
static void Main(string[] args)
  {  BigInteger n; Write("\n  МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕЙБЫШЕВА-ЭРМИТА.");
       bool shart = true;
       while (shart)
       {   Write("\n   n = "); n =int.Parse(ReadLine());
          if (n > 0) WriteLine("\n  H0(x) = 1\n");
          for (int t = 1; t <= n; t++)
          {   Write($"  H{t}(x) = ");
             for (int i = 0; i < (t / 2) + 1; i++)
             { Write(((i == 0) ? "" : (i) % 2 == 0 ? "+" : "-") + Koef(t, i) +
               (t-2*i == 0 ? "" : (t - 2 * i == 1) ? "x" : "x^" + (t - 2 * i)));
              }  WriteLine('\n');
          }   Write(" ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ НАЖМИТЕ: 1: ");
          int a =int.Parse(ReadLine());
          if (a == 1) shart = true; else shart = false;
       }        }
    static BigInteger Koef(BigInteger n, int j)
     {  return (Fact(n) / (Fact(j) * Fact(n - 2 * j)))* DoDaraja(n, j); }
    static  BigInteger Fact(BigInteger f)
     {   if (f == 0) return 1;       BigInteger n = 1;
```

```
        for (int i=1; i<=f; i++)   { n *= i; }      return n;        }
    static  BigInteger DoDaraja(BigInteger n, int j)
     { BigInteger m = 1;   for (int i=1; i<= n - 2 * j; i++) { m *= 2;}  return m; }   }
```


E:\ПРОЕКТ_C#\Полином_Эрмит\Полином_Эрмит\bin\Debug\Полином_Эрмит.exe

```
Многочлены ЧЕЙБЫШЕВА-ЭРМИТА.
n = 8

H0(x) = 1

H1(x) = 2x

H2(x) = 4x^2-2

H3(x) = 8x^3-12x

H4(x) = 16x^4-48x^2+12

H5(x) = 32x^5-160x^3+120x

H6(x) = 64x^6-480x^4+720x^2-120

H7(x) = 128x^7-1344x^5+3360x^3-1680x

H8(x) = 256x^8-3584x^6+13440x^4-13440x^2+1680

Для продолжения нажмите: 1
```

После автоматического вычисления многочленов Чебышева – Эрмита повторно используем ее алгоритм для рисовании их графиков [7] в форме для наглядности их поведения.



ЛИТЕРАТУРА:

1. Рафальсон С.З. О приближении функций в среднем суммами Фурье-Эрмита. – Изв.вузов. Математика, 1968, 7, с.78-84.
2. Абилов В.А. О порядке приближения непрерывных функций арифметическими средними частных сумм ряда Фурье-Эрмита. – Изв.вузов.

Матем., 1972, 3, с.3-9.
3. Маликов, А.М. Среднеквадратические полиноминальные приближения функций на всей оси и значения поперечников. - ДАН РТ. -2016. -т.59. - №11-12. -С.457-462.
4. Тухлиев К., Маликов А.М. О приближении функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышёва-Эрмита. – ДАН РТ. – 2016. – Т.59. – 7-8. – С.282–289.
5. Тухлиев К., Туйчиев А.М. Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышева-Эрмита алгебраическими полиномами. – Труды ИММ УрО РАН. – 2020. – Т.26. – 2. – С.270–277.
6. Маликов А.М. О наилучшем приближении в среднем алгебраическими полиномами с весом. – Ученые записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки. 2018, 4(47), С.3-8.
7. Маннонова М.А. “О некоторых алгоритмах интерполяционных моделей”, Армуғони навроҳони илм. №10 соли 2024, -Хуҷанд: Нури маърифат.